5. *Остиану Н.М.* Распределение гиперполосных элементов в проективном пространстве // Труды геометрического семинара / ВИНИТИ АН СССР. М., 1973. Т. 4. С. 71—120.

Yu. Popov

Fields of geometric objects for $\mathcal{H}$-distribution of affine space

Fields of invariant normalizations in the sense of Norden for the main structural subbundles of hyperband distributions in the affine space A_n in differential neighborhoods of the first and second order are constructed. Ostianu — Alshibaya normalizations of Λ-, L-, H-subbundle of the $\mathcal{H}$ -distribution are introduced in the second order differential neighborhood. The geometric meaning of the first kind normal $\vec{P}$ of the $\mathcal{H}$ -distribution is determined: normal $\vec{V}$ is parallel transferred along the tangent curve to the normal $\vec{P}$.

УДК 514

Г. А. Султанова, В. Ф. Тимербулатова

Пензенский государственный университет

Делители нуля алгебр антициклических и циклических чисел

Целью работы является нахождение делителей нуля алгебр $R(i^{m-1})$ и $R(e^{m-1})$, вычисление первой квадратичной формы поверхностей, содержащих все делители нуля их алгебр.

Ключевые слова: делители нуля, алгебра антициклических чисел, алгебра циклических чисел, первая квадратичная форма.

Пусть

$$R\ (i^{m\text{-}1})=\left\{a_0+a_1 i+a_2 i^2+\ldots+a_{m-1} i^{m-1} | a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}\in R\right\}$$

— алгебра антициклических чисел, базис которой составляют степени $i^0=1,\ i^1=i,\ i^2,\ldots,\ i^{m\text{-}1}$ элемента i, который удовлетворяет соотношению $i^m=-1$;

$$R\ (e^{m\text{-}1})=\left\{a_0+a_1e+a_2e^2+\ldots+a_{m-1}e^{m-1}|a_0,a_1,\ldots,a_{m-1}\in R\right\}$$

— алгебра циклических чисел, где $e^0=1,\ e^1=e,\ e^2,\ldots,\ e^{m\text{-}1}$ — базис алгебры, а $e^m=1$.

Определение. *Отличный от нуля элемент а линейной алгебры A называется делителем нуля, если существует* $b\in A,\ b\neq 0$*, такой, что* $ab=0$.

Найдем делители нуля алгебры антициклических чисел $R(i^{m-1})$.

Рассмотрим сначала частные случаи алгебры $R(i^{m-1})$.

При $m=2$ имеем алгебру $R(i)$ комплексных чисел. Эта алгебра не имеет делителей нуля.

При $m=3$ имеем алгебру

$$R(i^2)=\{a_0+a_1i+a_2i^2\ |\ a_0,a_1,a_2\in R\},\ \text{где}\ i^3=-1.$$

Таблица умножения базисных элементов этой алгебры имеет вид

	1	i	i^2
1	1	i	i^2
i	i	i^2	-1
i^2	i^2	-1	$-i$

Алгебра антициклических чисел имеет делители нуля, найдем их.

Пусть $a\neq 0$ и $ab=0$ для некоторого $b\neq 0$.

Положим $b=b_0+b_1i+b_2i^2$. Тогда

$$ab=(a_0+a_1i+a_2i^2)(b_0+b_1i+b_2\,i^2)=$$
$$=a_0b_0+a_0b_1i+a_0b_2i^2+a_1b_0i+$$
$$+a_1b_1i^2+a_1b_2(-1)+a_2b_0i^2+a_2b_1(-1)+$$
$$+a_2b_2\,(-i)=(a_0b_0-a_1b_2-a_2b_1)+$$
$$+(a_0b_1+a_1b_0\ -a_2b_2)i+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)i^2.$$

Так как $ab = 0$, то получим следующую систему линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} a_0 b_0 - a_2 b_1 - a_1 b_2 = 0, \\ a_1 b_0 + a_0 b_1 - a_2 b_2 = 0, \\ a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2 = 0. \end{cases}$$

Ненулевые решения эта система имеет тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} a_0 & -a_2 & -a_1 \\ a_1 & a_0 & -a_2 \\ a_2 & a_1 & a_0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (1)$$

Таким образом, доказана теорема

Теорема. *Антициклическое число* $a = a_0 + a_1 i + a_2 i^2$ *является делителем тогда и только тогда, когда выполняется условие (1).*

Раскрыв определитель, стоящий в левой части равенства (1) мы получим

$$a_0^3 - a_1^3 + a_2^3 + 3a_0 a_1 a_2 = 0. \qquad (2)$$

Отсюда следует

Теорема. *В точечном пространстве* R^3 *множество всех делителей нуля алгебры антициклических чисел* $R(i^2)$ *образует алгебраическую поверхность 3-го порядка.*

Вычислим первую квадратичную форму для данной поверхности, считая, что на R^3 задана евклидова метрика.

Поверхность (2) задана в неявном виде как $F(a_0, a_1, a_2) = 0$. Пусть a_0, a_1 — параметры. Тогда векторная функция $\vec{r} = a_0 \vec{i} + a_1 \vec{j} + a_2 \vec{k}$. Найдем частные производные данной функции по a_0 и a_1, получим

$$\vec{r_1} = \vec{i} + \frac{\partial a_2}{\partial a_0} \vec{k} = \vec{i} - \frac{F'_{a_0}}{F'_{a_2}} \vec{k} = \vec{i} - \frac{a_0^{\;2} + a_1 a_2}{a_2^2 + a_0 a_1} \vec{k};$$

$$\vec{r_2} = \vec{j} + \frac{\partial a_2}{\partial a_1}\vec{k} = \vec{j} - \frac{F'_{a_1}}{F'_{a_2}}\vec{k} = \vec{j} + \frac{a_1^{\ 2} - a_0 a_2}{a_2^2 + a_0 a_1}\vec{k} .$$

Подсчитаем коэффициенты первой квадратичной формы:

$$g_{11} = \vec{r_1} \cdot \vec{r_1} = 1 + \left(\frac{a_0^{\ 2} + a_1 a_2}{a_2^2 + a_0 a_1} \right)^2 ;$$

$$g_{12} = \vec{r_1} \cdot \vec{r_2} = \left(\frac{a_0^{\ 2} + a_1 a_2}{a_2^2 + a_0 a_1} \right)\left(\frac{a_1^{\ 2} - a_0 a_2}{a_2^2 + a_0 a_1} \right);$$

$$g_{22} = \vec{r_2} \cdot \vec{r_2} = 1 + \left(\frac{a_1^{\ 2} - a_0 a_2}{a_2^2 + a_0 a_1} \right)^2 .$$

Матрица, составленная из коэффициентов первой квадратичной формы, имеет вид

$$G = \begin{pmatrix} 1 + \left(\frac{a_0^{\ 2} + a_1 a_2}{a_2^2 + a_0 a_1} \right)^2 & \left(\frac{a_0^{\ 2} + a_1 a_2}{a_2^2 + a_0 a_1} \right)\left(\frac{a_1^{\ 2} - a_0 a_2}{a_2^2 + a_0 a_1} \right) \\ \left(\frac{a_0^{\ 2} + a_1 a_2}{a_2^2 + a_0 a_1} \right)\left(\frac{a_1^{\ 2} - a_0 a_2}{a_2^2 + a_0 a_1} \right) & 1 + \left(\frac{a_1^{\ 2} - a_0 a_2}{a_2^2 + a_0 a_1} \right)^2 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Найдем делители нуля алгебры циклических чисел $R(e^{m-1})$.

При $m = 2$ имеем алгебру $R(e)$ двойных чисел. Таблица умножения базисных элементов алгебры

	1	e
1	1	e
e	e	1

Вычислим делители нуля алгебры двойных чисел.

Пусть $a = a_1 + a_2 e, b = b_1 + b_2 e, a \neq 0, b \neq 0.$ По определению делителей нуля $a \cdot b = 0$. Тогда $(a_1 + a_2 e)(b_1 + b_2 e) = 0.$

$$(a_1b_1 + a_2b_2) + (a_2b_1 + a_1b_2)e = 0.$$

Отсюда получаем следующую систему:

$$\begin{cases} a_1b_1 + a_2b_2 = 0, \\ a_2b_1 + a_1b_2 = 0. \end{cases}$$

Ненулевые решения эта система имеет тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_1 \end{vmatrix} = 0\,. \qquad (4)$$

Следовательно, числа вида $a = a_1 \pm a_1e$ в алгебре двойных чисел являются делителями нуля.

При $m = 3$ имеем алгебру $R(e^2) = \left\{a_0 + a_1e + a_2e^2 | a_0, a_1, a_2 \in R\right\}$, где $e^3 = 1$.

Таблица умножения базисных элементов этой алгебры имеет вид

	1	e	e^2
1	1	e	e^2
e	e	e^2	-1
e^2	e^2	-1	$-e$

Пусть $a \neq 0$ и $ab = 0$ для некоторого $b \neq 0$.

Положим, $b = b_0 + b_1i + b_2i^2$. Тогда

$$ab = (a_0 + a_1 i + a_2 i_2)(b_0 + b_1 i + b_2\, i^2) =$$
$$= a_0b_0 + a_0b_1i + a_0b_2i^2 + a_1b_0i +$$
$$+ a_1b_1i^2 + a_1b_2 + a_2b_0i^2 + a_2b_1 + a_2b_2\, i =$$
$$= (a_0b_0 + a_1b_2 + a_2b_1) +$$
$$+(a_0b_1 + a_1b_0 + a_2b_2)i + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)i^2.$$

При условии $ab = 0$ получим следующую систему линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} a_0b_0 + a_2b_1 + a_1b_2 = 0, \\ a_1b_0 + a_0b_1 + a_2b_2 = 0, \\ a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2 = 0. \end{cases}$$

Ненулевые решения эта система имеет тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_0 & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (5)$$

Таким образом, доказана теорема

Теорема. *Циклическое число* $a = a_0 + a_1e + a_2e^2$ *является делителем нуля тогда и только тогда, когда выполняется условие (5).*

Раскрыв определитель, стоящий в левой части равенства (5) мы получим

$$a_0^3 + a_1^3 + a_2^3 - 3a_0a_1a_2 = 0. \qquad (6)$$

Отсюда следует

Теорема. *В точечном пространстве* R^3 *множество всех делителей нуля алгебры циклических чисел* $R(e^2)$ *образует алгебраическую поверхность 3-го порядка.*

Вычислим первую квадратичную форму для данной поверхности.

Поверхность (6) задана в неявном виде как $H(a_0, a_1, a_2) = 0$. Пусть a_0, a_1 — параметры. Тогда векторная функция $\vec{p} = a_0\vec{i} + a_1\vec{j} + a_2\vec{k}$. Найдем частные производные данной функции по a_0 и a_1, получим

$$\overrightarrow{p_1} = \vec{i} + \frac{\partial a_2}{\partial a_0}\vec{k} = \vec{i} - \frac{H'_{a_0}}{H'_{a_2}}\vec{k} = \vec{i} - \frac{a_0^{\,2} - a_1a_2}{a_2^2 - a_0a_1}\vec{k};$$

$$\overrightarrow{p_2} = \vec{j} + \frac{\partial a_2}{\partial a_1}\vec{k} = \vec{j} - \frac{H'_{a_1}}{H'_{a_2}}\vec{k} = \vec{j} - \frac{a_1^{\,2} - a_0a_2}{a_2^2 - a_0a_1}\vec{k}.$$

Вычислим коэффициенты первой квадратичной формы

$$g'_{11} = \overrightarrow{p_1} \cdot \overrightarrow{p_1} = 1 + \left(\frac{a_0^{\,2} - a_1 a_2}{a_2^2 - a_0 a_1} \right)^2;$$

$$g'_{12} = \overrightarrow{p_1} \cdot \overrightarrow{p_2} = \left(\frac{a_0^{\,2} - a_1 a_2}{a_2^2 - a_0 a_1} \right) \left(\frac{a_1^{\,2} - a_0 a_2}{a_2^2 - a_0 a_1} \right);$$

$$g'_{22} = \overrightarrow{p_2} \cdot \overrightarrow{p_2} = 1 + \left(\frac{a_1^{\,2} - a_0 a_2}{a_2^2 - a_0 a_1} \right)^2.$$

Матрица, составленная из коэффициентов первой квадратичной формы, имеет вид

$$G' = \begin{pmatrix} 1 + \left(\dfrac{a_0^{\,2} - a_1 a_2}{a_2^2 - a_0 a_1} \right)^2 & \left(\dfrac{a_0^{\,2} - a_1 a_2}{a_2^2 - a_0 a_1} \right) \left(\dfrac{a_1^{\,2} - a_0 a_2}{a_2^2 - a_0 a_1} \right) \\ \left(\dfrac{a_0^{\,2} - a_1 a_2}{a_2^2 - a_0 a_1} \right) \left(\dfrac{a_1^{\,2} - a_0 a_2}{a_2^2 - a_0 a_1} \right) & 1 + \left(\dfrac{a_1^{\,2} - a_0 a_2}{a_2^2 - a_0 a_1} \right)^2 \end{pmatrix}. \qquad (7)$$

Список литературы

1. *Султанов А. Я.* Линейные алгебры, их дифференцирования и линейные связности : моногр. Пенза, 2010.

2. *Вишневский В.В., Широков А.П., Шурыгин В.В.* Пространства над алгебрами : учеб. пособие. Казань, 1985.

G. Sultanova, V. Timerbulatova

The zero divisors of algebras of countercyclical and cyclic numbers

The purpose of the article is to find the zero divisors of the algebras $R(i^{m-1})$ and $R(e^{m-1})$, the calculation of the first fundamental form of surfaces that contain all zero divisors of this algebras.